Орехов А. В.[1],

Аналитическое обобщение эвристического «метода локтя»

Дискретный случайный процесс $\xi = \xi(t, \omega)$, называется квазидетерминированным если все его траектории y_t являются функциями времени заданного вида, но каждая из них зависит от случайного параметра ω. Основное свойство любого квазидетерменированного процесса состоит в том, что каждому случайному параметру ω, соответствует единственная траектория y_t процесса $\xi = \xi(t, \omega)$ [1]

В приложениях встречаются ситуации когда траектории y_t наблюдаемых квазидетерменированных случайных процессов (временные ряды) неотрицательны и монотонны. Качественное изменение таких процессов почти всегда совпадает с моментом когда линейное изменение y_t становиться нелинейным; при этом, либо числовые значения y_t начинают увеличиваться значительно быстрее и график y_t становиться вогнутым (см. рис. 1. ***а***), или наоборот их рост существенно замедляется и график y_t становиться выпуклым (см. рис. 1. ***б***).

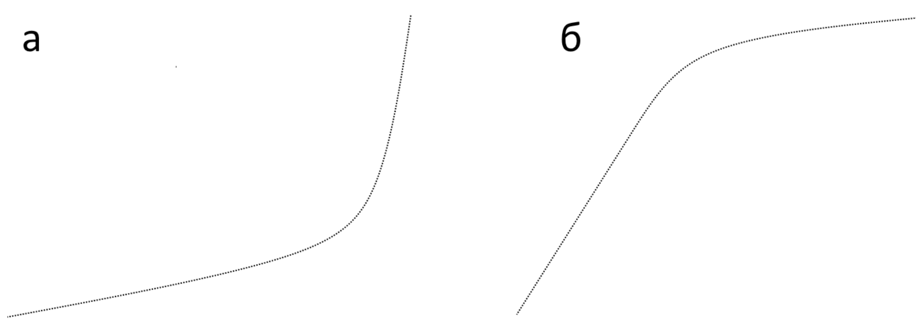

Рис. 1: Пример вогнутого (***а***), и выпуклого (***б***), вариантов изменения скорости возрастания числовых значений компонент временного ряда.

В этот момент график числовых значений компонент временного ряда y_t похож «на руку согнутую в локтевом суставе». Первым, кто обратил на это внимание и формально описал, был американский психолог

[1]Орехов Андрей Владимирович, ст. преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет

и психометрист Роберт Лэдд Торндайк, сформулировавший в 1953 году эвристический «метод локтя» [2]. Суть этого метода заключается в том, что если график монотонно изменяющихся значений временного ряда похож на «согнутую руку», то «локоть» графика является «особой точкой» которая, как указывалось выше, совпадает с моментом качественного изменения соответствующего процесса.

В качестве аналитического обобщения эвристического «метода локтя» можно рассматривать аппроксимационно-оценочные критерии. Если изучается дискретный квазидетерминированный случайный процесс $\xi = \xi(t, \omega)$ с монотонно возрастающими неотрицательными траекториями y_t, то момент t_0 изменения характера их возрастания от линейного типа к нелинейному, можно определить сравнивая квадратичную погрешность линейной аппроксимации траектории y_t, с квадратичной погрешностью нелинейной аппроксимации этой же траектории. Очевидно, что разность таких погрешностей является квадратичной формой, и в момент t_0 качественного изменения характера возрастания траектории y_t, эта квадратичная форма изменяет знак. Коэффициенты аппроксимирующих функций ищутся при помощи метода наименьших квадратов. Квадратичные формы аппроксимационно-оценочных критериев строятся локально, не по всем значениям последовательности y_t, а только по нескольким ее членам $y_{t_0-k}, \ldots, y_{t_0-2}, y_{t_0-1}$, расположенным в левой полуокрестности точки t_0 [3].

При построении квадратичных форм аппроксимационно-оценочных критериев и вычислении их числовых значений используется «метод скользящего окна», который применяется для решения вычислительных задач на массивах данных. Этот подход основан на том, что некоторое подмножеств данных, фиксированного размера, перемещается по основному массиву с целью поиска оптимального решения [4]. Значения y_t можно рассматривать в точках $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ полагая, что всегда $y_0 = 0$. Выполнения этого условия легко добиться на любом шаге поиска оптимального решения при помощи преобразования:

$$y_0 = y_j - y_j, y_1 = y_{j+1} - y_j, \ldots, y_{k-1} = y_{j+k-1} - y_j.$$

Квадратичная погрешность аппроксимации числовой последовательности y_t нелинейной функцией $f(t) = \alpha\varphi(t) + \beta$ по узлам аппроксимации

$y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ выражается формулой:

$$\delta_f^2(k_0) = \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha\varphi(i) + \beta - y_i)^2,$$

а квадратичная погрешность ее линейной аппроксимации по тем же узлам равна:

$$\delta_l^2(k_0) = \sum_{i=0}^{k-1} (a \cdot i + b - y_i)^2.$$

В общем случае аппроксимационно-оценочный критерий можно сформулировать следующим образом. Пусть $\delta_{lf}^2(k_0) = \delta_l^2(k_0) - \delta_f^2(k_0)$. Будем говорить, что вблизи y_{k-1} характер возрастания числовой последовательности y_t изменился с линейного на нелинейный, если для узлов $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ линейная аппроксимация не хуже нелинейной, т. е. справедливо неравенство $\delta_{lf}^2(k_0) \leq 0$, а для набора точек $y_1, y_2, \ldots, y_k$, сдвинутых на один шаг дискретности вправо, нелинейная аппроксимация стала точнее линейной, т. е. $\delta_{lf}^2(k_0) > 0$.

Работа выполнена в порядке личной инициативы.

Список литературы

[1] Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

[2] Thorndike R. L. Who belongs in the family? // Psychometrika. 1953. Vol. 18. P. 267-–276. https://doi.org/10.1007/BF02289263

[3] Orekhov A. V. Quasi-Deterministic Processes with Monotonic Trajectories and Unsupervised Machine Learning // Mathematics. 2021. Vol 9. 2301. https://doi.org/10.3390/math9182301

[4] Sliding Window Technique. URL:http://www.geeksforgeeks.org/window-sliding-technique/ (Дата обращения 11.09.2024)